Erwartungswert

Einstieg

(Video „Worum geht's" siehe eLessons)

(Gewinnspiele zum Einstieg siehe eLessons)

Wahrscheinlichkeitsverteilung

(Ausführliches Video siehe eLessons)

Bis anhin haben wir Vorgänge betrachtet und haben dabei von *einigen* Ereignissen die Wahrscheinlichkeit berechnet. Berechnet man jedoch die Wahrscheinlichkeiten *aller* Ergebnisse eines Zufallsexperiments, so benutzt man dafür den Ausdruck **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Zufallsgrösse / Zufallsvariable

(Ausführliches Video siehe eLessons)

In Zufallsexperimenten betrachten wir oft eine Grösse, welche vom Zufall abhängt:

- Anzahl
- Zeit
- Gewinn
- Länge
- Gewicht
- Temperatur
- Distanz
- usw.

Ist in einem Zufallsexperiment das zu betrachtende Merkmal eine Grösse, so nennt man diese Grösse **Zufallsgrösse** oder auch **Zufallsvariable**, da der Wert dieser Grösse vom Zufall abhängt.
Bei einem Zufallsexperiment mit einer Zufallsgrösse ist jedes Ergebnis also eine Zahl!

Der Erwartungswert

Definition:

Der Erwartungswert ist ____
____

(zwei Lernaufgaben für die Formel des Erwartungswert siehe eLessons)

Erwartungswert Formel

(Ausführliches Video siehe eLessons)

Es seien X die Zufallsgrösse eines Zufallsexperiments,
$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ die Werte der Zufallsgrösse und
$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung sieht wie folgt aus:

Zufallsgrösse X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Wahrscheinlichkeit	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Dann ist der Erwartungswert dieser Zufallsgrösse:

Erwartungswert Formel:

$E(X) \quad = $ ____________________________________

$\quad\quad\quad = $ ____________________________________

(Interaktives Video zum Vorgehen inklusive Beispiel siehe eLessons)

(Interaktive Verständnisaufgaben siehe eLessons)

Aufgaben

Aufgabe 1 «Würfel»:

Zwei Würfel werden geworfen. Bestimme den Erwartungswert

a) der Augensumme,
b) der höchsten Augenzahl,
c) des Produkts der Augenzahlen.

Aufgabe 2 «Münze»:

Eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf erscheint oder fünfmal Zahl.
Wie hoch ist die erwartete Anzahl an Würfen?

Aufgabe 3 «Anna & BoB»:

Anna bietet Bob ein Spiel an:
Eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf erscheint oder fünfmal Zahl.
Falls beim ersten Wurf Kopf erscheint, erhält Bob 0 €,
falls beim zweiten Wurf Kopf erscheint, erhält er 1 €,
falls beim dritten Wurf Kopf erscheint, erhält er 2 €,
falls beim vierten Wurf Kopf erscheint, erhält er 3 €,
falls beim fünften Wurf Kopf erscheint, erhält er 4 €,
falls in allen fünf Würfen Zahl erscheint, erhält er 10 €.

a) Bob bezahlt pro Spielrunde einen Einsatz von 2 €.
   Nach 200 Runden hat Bob genug und hört auf zu spielen. Warum?
b) Wie hoch müsste der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?
   (In einem **fairen Spiel** ist der Einsatz gleich dem zu erwartenden Gewinn.)

Aufgabe 4 «Teilungsproblem»:

Zwei Spieler legen jeweils einen Geldeinsatz von 100 Euro in einen Topf und spielen ein Glücksspiel um diese 200 Euro. Das Spiel besteht aus mehreren Runden, wobei zu Beginn die Chancen zu Gewinnen für beide gleich sind. Die 200 Euro hat gewonnen, wer zuerst fünf Runden gewinnt. Beim Spielstand von 4 : 2 muss das Spiel abgebrochen werden. Wie sollen die 200 Euro aufgeteilt werden?

Bemerkung:

Beim allgemeineren «Teilungsproblem von Pascal & Fermat» beträgt der Einsatz nicht 100, sondern E und der Spielstand nicht 4 : 2, sondern a : b.

Aufgabe 5 «Roulette»:

Im Roulette landet eine Kugel in einem Kessel zufällig auf einem von 37 Feldern, welche mit den Zahlen 0, 1, 2, …, 36 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Kugel in einem Feld landet, ist dabei für jedes Feld gleich gross.
Eine Variante, um einen Einsatz zu tätigen, ist, auf eine Zahl zu setzen. Falls die Kugel dann auf dieser Zahl landet, so erhält man 36-mal seinen Einsatz zurück (inklusive des gelegten Einsatzes) und falls die Kugel woanders landet, so verliert man seinen Einsatz.
Im Casino Zürich wird an einem Roulette-Tisch pro Minute eine Runde gespielt. Bob hat ein „kleines“ Spielproblem und spielt immer einmal wöchentlich zwischen 20.00 und 24.00 Uhr ohne Unterbruch und setzt pro Runde jeweils immer 10 Euro auf eine Zahl. Mit wie viel Gewinn/Verlust ist nach einem Jahr zu rechnen?

Aufgabe 6 «Anoroc Virus»:

Das neuartige Anoroc Virus hat sich verbreitet.

Es stellte sich heraus, dass der Verlauf der Krankheit davon abhängt, welche Blutgruppe man hat. **45%** der Menschheit besitzt die **Blutgruppe 0**.

Die Statistik zeigt den Zusammenhang:

- *Blutgruppe 0:* keine Symptome (12%)
  normaler Verlauf (86%)
  schwerer Verlauf (2%)
- *Restliche Blutgruppen:* keine Symptome (36%)
  normaler Verlauf (54%)
  schwerer Verlauf (10%)

a) Jemand wird infiziert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
   a_1) folgen keine Symptome?
   a_2) folgt ein normaler Verlauf?
   a_3) folgt ein schwerer Verlauf?

b) Je nach Verlauf der Krankheit wird mit unterschiedlichen direkten Kosten gerechnet (Arbeitsausfall, Arztbehandlung, Krankenhaus, …). Treten keine Symptome auf, so entstehen auch keine direkten Kosten. Bei einem normalen Verlauf rechnet man mit direkten Kosten in der Höhe von 4’500 Euro und bei einem schweren Verlauf mit 70’000 Euro.
   b_1) Welche durchschnittlichen direkten Kosten verursacht ein Infizierter?
   b_2) In Zürich wohnen 1'536'000 Personen. Insgesamt haben sich dort 28% mit dem Virus angesteckt. Wie hoch sind die dadurch zu erwartenden direkten Kosten?

Aufgabe 7 «Chuck a Luck»:

Im Spiel «Chuck a Luck» kann man einen Einsatz auf eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 tätigen. Danach werden drei Würfel geworfen.
Erscheint nun bei keinem Würfel die Augenzahl, auf welche man gesetzt hat, so verliert man seinen Einsatz.
Erscheint die Zahl, auf welche man gesetzt hat, einmal, so darf man seinen Einsatz behalten und erhält zusätzlich einmal denselben Betrag.
Erscheint die Zahl, auf welche man gesetzt hat, zweimal, so darf man seinen Einsatz behalten und erhält zusätzlich zweimal denselben Betrag.
Erscheint die Zahl, auf welche man gesetzt hat, dreimal, so darf man seinen Einsatz behalten und erhält zusätzlich dreimal denselben Betrag.

Wie hoch ist der Erwartungswert, wenn man dieses Spiel *n*-mal spielt?

Aufgabe 8 «Sankt-Petersburg-Paradoxon»:

Eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf erscheint, dann ist das Spiel beendet.

Erscheint beim ersten Wurf Kopf, so erhält man 2 €.
Erscheint beim zweiten Wurf Kopf, so erhält man 4 €.
Erscheint beim dritten Wurf Kopf, so erhält man 8 €.
...
Erscheint beim n-ten Wurf Kopf, so erhält man 2^n €.

Wie hoch soll bei einem fairen Spiel der Einsatz sein?

Lösungen

(Detaillierte Lösungen siehe eLessons)

Aufgabe 1 «Würfel»:
a) 7
b) 4.472
c) 12.25

Aufgabe 2 «Münze»:
Der Erwartungswert ist E(X) = 1.938.
Man erwartet also zwei Würfe.

Aufgabe 3 «Anna & Bob»:
a) Über 200 Runden beträgt der erwartete Verlust für ihn 175 €
b) In einem fairen Spiel sollte der Einsatz 1.125 € betragen.

Aufgabe 4 «Teilungsproblem»:
Man sollte die 200 € aufteilen in 175 € und 25 €.

Aufgabe 5 «Roulette»:
Man erwartet 3370 € Verlust. (Man sollte hier auf 10€ runden.)

Aufgabe 6 «Anaroc Virus»:
a) a_1) 25.2% a_2) 68.4% a_3) 6.4%
b) b_1) 7'558 € b_2) 3'250'544'640 €

Aufgabe 7 «Chuck a Luck»:
Beim *n*-maligen Spiel beträgt der Erwartungswert $n \cdot (-0.079a)$.

Aufgabe 8 «Sankt-Petersburg-Paradoxon»:
Der erwartete Gewinn ist ∞, man sollte also bereit sein alles zu setzen.